データ解析基礎

第６回 仮説検定と推定の基礎

仮説検定とは

- **仮説** (hypothesis)
  - **ある現象を説明するための仮定**
  - **以下の三者の関係が重要．**

    母集団（現象）

    標本（データ）

    仮説
- **仮説検定** (hypothesis testing)
  - **仮説が正しいかどうかをデータに基づいて判断すること．**

仮説検定の考え方 1

3

- 帰無仮説と対立仮説
  - 帰無仮説(null hypothesis :H0)
    通常だれもがもっともだと思う仮説
  - 対立仮説(alternative hypothesis :H1)
    帰無仮説とは逆の仮説．
- 基本的な姿勢
  - 通常は，対立仮説が正しいことを証明したい．
  - だれもがもっともだと思うことを証明しても面白くない．

仮説検定の考え方 2

4

- ただし，正しいことを直接証明するのは難しい．
  - そこで，帰無仮説を棄却することを考える．
  - 帰無仮説が間違っていることを証明しようとする．
- 具体的には，
  - 「帰無仮説が正しい」と仮定したとき，データが観測される確率が極めて低いことを証明する．
  - 証明できれば，帰無仮説を棄却し，対立仮説を採択する．
  - 証明できなければ，帰無仮説は棄却されない．

例題

5

- コインの真偽を確かめる．
  - 表が出る確率と裏が出る確率が等しいかどうかを判断する．
- この場合は，
  - 帰無仮説：コインは本物である．
  - 対立仮説：コインは偽物である．
- 実験を行なってデータを得る．
  - コインを15回投げて表裏の回数を調べる．

例題（続き）

6

- 確率モデルを使ってその回数が出る確率を計算する．
  - ベルヌーイ試行で表の回数の分布は二項分布．

m	prob	m	prob
0	0.000	8	0.196
1	0.000	9	0.153
2	0.003	10	0.092
3	0.014	11	0.042
4	0.042	12	0.014
5	0.092	13	0.003
6	0.153	14	0.000
7	0.196	15	0.000

- この確率の大小から帰無仮説を棄却するかどうかを決める．

棄却域と採択域

7

- **棄却域**(rejection region)：
  - **帰無仮説が棄却されるデータの範囲**
- **採択域**(acceptance region) ：
  - **棄却域以外の領域**

m	prob	m	prob
0	0.000	8	0.196
1	0.000	9	0.153
2	0.003	10	0.092
3	0.014	11	0.042
4	0.042	12	0.014
5	0.092	13	0.003
6	0.153	14	0.000
7	0.196	15	0.000

有意水準 (significance level)

8

- **棄却域の大きさはどのようにして決めればよいか？**
  - **こう決めればよいという絶対的な基準はない．**
  - **通常は棄却域の確率が**5%**や**1%**になるように定める．**
  - **この確率の大きさを「有意水準（α）」という．**
- **有意水準は，帰無仮説が正しいときにそれを棄却してしまうリスクの大きさである．**
  - **棄却域に入る可能性は低いが，確率は**0**ではない！**
- **有意水準が低いほど帰無仮説は棄却されにくくなる．**
  - **対立仮説を採択したい立場からすれば厳しくなる．**

過誤確率と有意水準，検出力

9

- 過誤確率：誤った結論を導いてしまうリスクの大きさ
  - 第1種：帰無仮説が正しいのに棄却してしまう確率
    帰無仮説が正しいときにデータが棄却域に入る確率
  - 第2種：帰無仮説が誤っているのに棄却しない確率
    対立仮説が正しいときにデータが採択域に入る確率
- 第1種過誤確率は有意水準で定めることができる．
- 検出力(power)とは，１－（第2種過誤確率）
- 有意水準が低く，検出力が高い検定方法が望ましい．
  両者はトレードオフの関係がある．一般には，
  データ数を決めることでそれらを制御する．

片側検定と両側検定

10

- 両側検定(nondirectional)：
  - 棄却域が分布の両側にある場合 (two-tailed)
    例：帰無仮説：$\mu = 0$
    対立仮説：$\mu \neq 0$
- 片側検定(directional)：
  - 棄却域が分布の片側にある場合 (one-tailed)
    例：帰無仮説：$\mu = 0$
    対立仮説：$\mu > 0$　（能力が高いなどの場合）
- これらは，対立仮説の定め方によって決まる．

母集団と標本（もう一度復習）

11

- 統計的推測の目的
  - 限られたデータから背後にある現象を理解する．
- 標本と母集団
  - 標本(sample)：実験データ（実験で得られたもの）
  - 母集団(population)：現象全体（実際には計測不能）

標本と母集団を混同するな．
両者を明確に区別することが混乱を防ぐ．

標本の選び方

12

- 母集団の中から偏りなくデータをとるには？
- 無作為抽出 (random sampling)
  - Equal：母集団の全要素を同じ確率で選ぶこと．
  - Independent：ある要素を選んだことが他の要素を選ぶ過程に影響を与えないこと．
- 復元抽出と非復元抽出(with/without replacement)
  - 選んだ標本をもう一度もとの集合にもどす．
  - 通常，復元抽出（つまり独立性）を仮定する．
  - 母集団が十分に大きければ，実質的な差はない．

統計量とパラメータ

13

- 平均，分散，標準偏差などの量は，標本に対しても母集団に対しても存在する．
- 標本分布の場合：
  - データをもとに計算する．→　統計量(statistics)
- 母集団分布の場合
  - もともと決まっている．→　母数(parameter)
- 推定とは

  統計量から母数を推測すること．

例題

14

- ベルヌーイ試行を10回行なって平均成功率を求める．
  - 得られた平均値 μ → 標本平均
  - ベルヌーイ試行を支配するパラメータ p → 母平均
- 注意すべき点：
  - パラメータは神様が決めた値．だから変動しない．
  - 標本平均は実験を行なうたびに違う値をとる．

推定量

15

- 推定：
  - 母集団の確率モデルを仮定したとき，そのモデルのパラメータをデータ（あるいは統計量）に基づいて推測すること．
- 推定量(estimator)と推定値(estimate)
  - 推定量：データからパラメータを求める公式, 手法．
  - 推定値：その手法を用いて求めたパラメータの値．

推定量はどうやって定めるのか？

16

- 例：母集団の平均（母平均）を知りたい．
  - データから母平均を推定するにはどうするか？
- 通常，データの平均（標本平均）を母平均の推定量として使う．
  - 標本平均以外にも推定量の候補はある．
  - 標本平均を母平均の推定量として使うのはなぜか？
    - → それには合理的な理由がある．
- 「母平均の推定量」と「標本平均」を区別せよ！

推定量のよさを定める指標

17

- 小標本特性（データが少ないときの統計的性質）
  - 不偏性
  - 有効性
  - 平均平方誤差
- 大標本特性（データ数無限大のときの統計的性質）
  - 漸近的不偏性
  - 一致性
  - 漸近的有効性

不偏性

18

- 不偏性とは
  - 推定量 $\hat{\theta}$ の期待値が真の値 θ に等しいこと．

    $E(\hat{\theta}) = \theta$
  - この式の意味をよく理解せよ．
    実験を一回行なうと，それで平均が一つ求まる．
    それを繰り返して平均をとったものが左辺．
- 例：データ平均は母平均の不偏推定量である．
- 漸近不偏性とは，データ数無限の条件での不偏性．

分散の不偏推定量は？

19

- 分散の不偏推定量は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \Sigma (X - \overline{X})^2$$

  - データの分散は，母分散の不偏推定量ではない．（ただし，漸近的不偏推定量ではある）
  - 数学的な証明は板書で．$\overline{X}$ がデータX から計算されることに注意．
  - 数値実験で上の性質を確かめてみる．→　演習問題

有効性

20

- 不偏推定量のうち分散が最も小さいもの．
  - 正確には，Cramer-Rao boundを実現するもの
- ここでの分散は「推定値の分散」であることに注意．
  - 分散が小さいとは，実験を行なうたびに推定値が変動しにくいということ．
- Cramer-Rao bound:

$$\frac{1}{N\,\mathrm{E}[\partial \log f(x) \;/\; \partial\theta]^2}$$

(Fisher の情報量)

一致性

- 一致性
  - データ数を無限大まで増やしたときに，推定量が真の値に確率1で近づいていくこと．
    （N→無限大で推定値が真の値に確率収束）
- 参考：推定量の実際の求め方
  - 最尤推定法(most likelihood method)
  - モーメント法(moment method)