データ解析基礎

第3回 確率と確率分布

確率とは？

- 古典的な確率の考え方：哲学
  - 先験的確率：場合の数の比で与えられる値．
    等確率で起きる単一事象を考え，事象Aに該当する場合の数とすべての場合の数との比を求める．
  - 推測的確率：実験で得られた相対度数で定まる値．
    試行の繰り返しや大量の現象によって得られる．
  - 主観的確率：ある事象に対する主観的な確信度．
    経験によって逐次修正していくものと考える．
- 公理的な確率：数学
  - 解釈に依存せず，数理的な議論を行なう．

事象と標本空間

3

- 実験：観測可能な結果が得られる一つの行為
- 単一事象：実験によって得られた一つの結果
- 事象：単一の事象あるいはその組み合わせ
- 標本空間：起こりうる単一事象の集合
  - 言い方をかえれば，

    単一事象は標本空間の要素

    事象は標本空間の部分集合

事象に関するいくつかの定義

4

- 全事象：標本空間のすべての要素からなる事象．
- 空事象：標本空間の要素を一つも含まない事象．
- 補事象：「事象A が起こらない」という事象
- 和事象：「事象A, B のどちらかが起きる」という事象．
- 積事象：「事象A, B がどちらも起きる」という事象
- 排反：二つの事象が共に起きることがないこと．

  いいかえれば，「積事象が空事象」になること

以上の定義は，事象の集合を考えてベン図を書けばすぐに理解できる．

公理的確率の定義

5

- 標本空間の部分集合に対して割り当てられた数．
- 以下の三つの性質を満たす．

  1. $P(A) \geq 0$
  2. $P($「全事象」$) = 1$
  3. A とB が排反のとき，$P(A) + P(B) = \mathrm{P}(A \text{ or } B)$

- 例：先験的確率の考え方

  標本空間を構成する単一事象に対して等しく確率を割り当てれば，確率の公理を満たす．

公理からすぐに導かれる性質

6

- $P($「空事象」$) = 0$
- $P($「A の補事象」$) = 1 - P(A)$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- A がB に含まれていれば，$P(A) \leq P(B)$

このほか，集合の結合則，分配則に対応していくつかの法則が導かれる．

場合の数の数え方：古典的確率の計算法

7

- 乗法規則：すべての場合の数の求め方

  実験をk 回行なったとき，各々の場合の数が$n1, \ldots,$ nkであれば，$n1 \times n2 \times \ldots \times nk$ 通りの場合が生じる．

- 順列：

  n個の相異なる要素からk 個を取出すときの場合の数．

$$nPk = \frac{n\,!}{(n-k)\,!} = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)$$

- 組合せ：

  取り出す要素の順序を考慮しないときの場合の数．

$$nCk = \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,k\,!}$$

例題：

8

- 1年を365日とする．n 人の人が集まったときに，同じ誕生日の人がいる確率を求めよ．
  - 計算してみると，n=10ではおよそ0.11であるが，n=23で0.5を越える．
- 1個のさいころを4回投げたとき，少なくとも1回，6の目が出る確率を求めよ．
  - この賭にかけるのは得策か否か？

確率の加法則

- 二つの事象が排反な場合：
  二つの事象の積事象が空事象であれば，
  $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$
- 二つの事象が排反でない場合：
  二つの集合の積事象が空事象でないならば，
  $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$

  - 上の法則は公理そのもの．
  - 下の法則はベン図を書けばすぐに理解できる．

事象の独立性

- 独立性：事象が相互に影響を及ぼさないこと．
  - コインを2回投げたとき二つの結果は互いに無関係．
  - 音声信号と背景雑音は（通常）無関係．
- 独立性と排反性を混同するな．
- 独立性と相関性の違いにも注意せよ．
  - 相関性は1次の関係のみ．独立性の方が厳しい．

$$\text{独立} \;\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\; \text{無相関}$$

条件付き確率

11

- 事象A が起きたという条件の下で事象B が起きる確率

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}$$

- AとBが独立である場合は，

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Bが起きる確率はAが起きるかどうかに依存しない．
ベン図または面積図を書くとわかりやすい．

確率の乗法則

12

- 二つの事象が独立である場合，

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$$

- 独立でない場合

$$P(A \text{ and } B) = P(B \mid A) \times P(A)$$
$$= P(A \mid B) \times P(B)$$

独立であれば，条件付き確率が条件によらなくなるので上式が導かれる．

Bayesの定理

13

- 条件件き確率の定義から以下の式が導ける．

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)}{P(B)} \times P(A)$$

  - さらに，分母は $P(B) = \Sigma P(B \mid Ai)\, P(Ai)$ と展開可能．

- この定理は主観的確率の更新に使われることが多い．
  - 右辺：事前確率 (prior)
    事象Bを観測する前の「事象Aがおきる確率」
  - 左辺：事後確率 (posterior)
    事象Bを観測した後の「事象Aがおきる確率」

大数の法則

14

- 独立試行をn回繰返したとき，ある事象が起きる相対度数 p_n はnが大きくなるに従ってその確率pに近づく．

$$P(|\ p_n - p\ | > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

  数学的には，Chevyshevの不等式から導かれる．

- 直感的な意味
  - 実験を何度も繰り返せば，その事象が起きる確率はその相対度数によって推定できる．
    → 推測的確率のうらづけを与える定理
  - より正確な表現は次回の講義で．