データ解析基礎レポート課題（第９回）略解および講評

全体的なコメント

・両側検定と片側検定を混同している解答がめだったので，注意してほしい．

1. ある新しい血圧降下剤に副作用があるかどうかを調べるため，12 人の高血圧患者にこの薬を服用してもらい，服用前と服用後で副作用の度合いを反映したある試験をしたところ，以下のような結果が出た．**副作用があるかどうか**を有意水準 1%で検定せよ．

患者番号：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
服用前指数：	10	14	5	6	9	15	1	20	10	2	7	10
服用後指数：	5	9	7	3	10	15	4	16	12	5	3	6

略解：

いわゆる「関連のある標本」に相当するケースであり，患者ごとに差を求めてから，母集団が一つの場合の t 検定を行なうことになる．

患者ごとの差の平均は 1.17 である．また，標準偏差の不偏推定量は 3.27 と求まる．したがって，「差の平均が従う分布」の標準偏差は 3.27/sqrt(12) = 0.94，これより，検定統計量は（差の平均）／（差の平均の標準偏差）= 1.17/0.94 = 1.24 となる．

有意水準 1%の両側検定の限界点は自由度 11 の t 分布の数表から±3.106 である．上で求めた統計量は棄却域に含まれないので，「副作用がない」という帰無仮説は採択されることになる．

棄却域の限界点をどうやって求めるかという質問があったので復習しておくと，限界点は，数表で求めるか，数値計算で求めるかのどちらかである．数値計算で求めるときは，使っているソフトウェアに組み込みの関数を用いる．例えば，MS EXCEL には t 分布，F 分布などの限界点を求める関数がついている．棄却域内の確率（面積）が 5%の両側検定ならば 0.025 と 0.975，1%の両側検定ならば 0.005 と 0.995，5%の片側検定ならば 0.05 あるいは 0.95，1%の片側検定ならば 0.01 あるいは 0.99 となる．

2. ある動物の体重にビタミンが与える影響を調べる研究者が，あるビタミンを投与すると体重が予測しやすくなる**（ばらつきが小さくなる）のではないか**と考えた．そのビタミンを投与しない動物の体重の平均は 15Kg，分散は 5.2Kg^2 であることがわかっている．16 匹の新生動物にそのビタミンを投与して体重を計測したところ，平均が 18Kg，分散推定値が 3.6Kg^2 であった．有意水準 5%で仮説を検定せよ．

補足：分散推定値は正確には「分散の不偏推定値」とかくべきところであった．

略解：

　検定すべき仮説を

　　　帰無仮説：ビタミンを投与した実験動物の体重の分散が 5.2Kg^2 に等しい．

　　　対立仮説：　　　　　　　　　　　　〃　　　　　　　　　　　　より小さい．

と設定する．これは，分散に関する検定であるからχ2 検定になる．

　スライド資料にあるように，分散の不偏推定量を$\hat{\sigma}^2$，帰無仮説の分散をσ^2 としたとき，検定統計量は

$$\chi^2 = (n-1)\,\hat{\sigma}^2 / \sigma^2$$

であるから，$\chi2 = (16-1) \times 3.6 / 5.2 = 10.38$ となる．

　一方，**有意水準 5%の片側検定**の棄却域は，自由度 15 のχ2 分布の数表から$\chi2 < 7.261$ であることがわかる．上で求めた数値は棄却域に入っていないことから，「ビタミンの効果はなかった」という結論が導かれる．

「ばらつきが小さくなるのではないか」と考えたというくだりから，これは「片側検定」であると判断してほしい．「ばらつきが変化するのではないか」とあれば，両側検定が適切であろう．

3.　正規分布に従う分散未知の母集団からデータを 25 個取り出したところ，分散の不偏推定値として 36 が得られた．真の分散の信頼係数 90%の信頼区間を求めよ．

略解：

　真の分散をσ^2 とすれば，1 と同様に，分散の不偏推定量から得られる量 $(n-1)\,\hat{\sigma}^2 / \sigma^2$ は自由度 $n-1$ のχ2 分布に従う．

　自由度 24 のχ2 分布の 90%の信頼区間は，数表の 5%点と 95%点から，(13.85, 36.42)である．したがって，上式より分散の信頼区間は

$$((25-1) \times 36 / 36.42,\ (25-1) \times 36 / 13.85) = (23.72,\ 62.38)$$

となる．

4.　高校の指導要領を変更した効果があるかどうかを調べるため, 旧指導要領と新指導要領のそれぞれの下での学生の数学の成績の分散を調べたところ，以下のデータが得られた．

　　　旧要領：データ数：31，分散推定値：16,　　新要領：データ数：30，分散推定値：3

　分散の違いが有意であるかどうかを調べよ(p 値を求めて，判断を下せばよい)．

略解：

　二つの無関係な集団の分散値を比較するので，F 検定を行なう．大きな方の分散推定値を小さな方の分散推定値で割れば,

$$F = 16 / 3 = 5.33$$

となる. 一方, 自由度 30, 29 の F 分布について F=5.33 に対応する p 値を求めると p = 0.00001023

となる．したがって，有意水準として 5%，1%，0.1%のいずれをとっても，分散の違いは有意であるといえる．

p 値を求めるには数値計算を行なうしかない．データ処理ソフトは統計パッケージには必ずこの種の関数が含まれているので，使っているアプリケーションの組み込み関数を利用してほしい．例えば，EXCEL の場合は FDIST 関数を使えばよい．

両側検定を仮定するか，片側検定を仮定するかにより p 値は 2 倍変わる．それぞれの統計パッケージでは，どちらかを前提として p 値を求めているようである．そのあたりは，マニュアルなどを読んで確認しておく必要があろう．

なお，EXCEL の TDIST 関数では両側検定か片側検定かを選択することができる．FDIST 関数で選択できないのは，通常，片側検定を行なうからであろう（違いが大きくなるときはかならず F 値が大きくなるから）．

5. 父親の IQ のばらつきと息子の IQ のばらつきに違いがあるかどうかを調べたい．いま，20 組の父子について IQ を調べたところ以下のデータが得られた．分散が等しいかどうかについて有意水準 1%で検定せよ．（データは省略）

略解：

この問題では，父と子は１対１で対応しているため，互いに関連のあるグループを比較していることになる．したがって， t 検定を行なう．

父の集団の平均値は 109.4，分散の不偏推定値は 307.52 となる．一方，子の集団の平均値は 109，分散の不偏推定値は 240.95 である．また，両者の相関係数 r は，共分散が 234.8 であることから，r = 234.8 / sqrt(292.14 x 228.9) = 0.907 である．

以上の数値をもとめて，検定統計量を計算すると，

$t = (\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_2^2) / \mathrm{sqrt}[(4 \mathrm{~x~} \hat{\sigma}_1^2 \mathrm{~x~} \hat{\sigma}_2^2) * (1 - r^2) / (n - 2)]$

$= (307.52 - 240.95) / \mathrm{sqrt}[(4 \mathrm{~x~} 307.52 \mathrm{~x~} 240.95) * (1 - 0.907 * 0.907) / (20 - 2)]$

$= 66.57 / \mathrm{sqrt}[296381 * 0.176 / 18] = 66.57 / \mathrm{sqrt}(2891) = 1.24$

(計算の途中の値は小数点以下２桁までしか書いていないが，実際の計算はもっと多い桁で計算しているので端数はあわない)．

一方，棄却域は，自由度 18 の t 分布によって定まる．有意水準 1%の両側検定であるので，棄却域は数表から $t < -2.878$, $2.878 < t$ である．上で求めた数値は棄却域に含まれていないので，「父と子の IQ の分散には差がない」という結論が導かれる．

講評：

この問題の正解率は極めて低かった．間違いの原因は，大きく分けて三つに集約される．

1. 計算ミス．
2. 父と子の比較をすることが「関係のあるグループの比較」であることに気づかず，他の問

題と同様に F 検定を行なってしまっている．

3. 相関係数の計算に，分散の不偏推定量を使ってしまっている．

２．については，問題の意味をよく考えてもらうしかない．

３．は少々細かい．相関係数は，（共分散）／[（父の標準偏差）×（子の標準偏差）]で得られる．標準偏差は分散の平方根であるが，この計算で用いるのは，通常の分散（つまりデータ数 n で割ったもの）で，分散の不偏推定量（n - 1 で割って求めるもの）ではない．つまり，$\hat{\sigma}_1^2$ や $\hat{\sigma}_2^2$ をそのまま使ってはまずいのである．

以上．